Royaume du maroc
Ministère de l' Enseignement,
de la formation professionnelle
de l' Enseignement Supérieur, et de la Recherche Scientifique et de la Formation des cadres
Groupe Scolaire Aljabr.fes

Bac BLANC 2019-2020

MATHÉMATIQUES

Bac SM Internationale

24 Juin 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques sont non autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices
on rappel que le condidat doit choisir un exercice soit le quatrième (sur les structures algébriques)soit (le cinquième (sur l' arithmétique) . Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'ilest amené à prendre.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.
la première page est une page de garde

Exercice 1 3.5ps

soit m un complexe non nul

Partie I

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 - 2(m+1-i)z + m^2 + (1-i)m - i = 0$

1. vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (2mi)^2$
2. résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
3. déterminer les valeurs possibles de m pour que l'une des solutions soit nulle

Partie II

Dans la suite on suppose que $m \in \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i, 0\}$

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$on considère les points $A(1)$,$B(-i)$, $M(m)$,$M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ tels que les triangles (AMM_2) et (BMM_1)soient rectangles isocèles avec

$$\overline{\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1B}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2M}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

1. Montrer que $z_1 = \dfrac{1-i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \dfrac{1+i}{2}(m-i)$ (on pourra appliquer l'expression complexe d'une rotation)
2. Vérifier que $\dfrac{z_2}{z_1} = i\dfrac{(m-i)}{(m+1)}$ en déduire la forme exponentielle de m pour que le triangle (OM_1M_2) soit un triangle équilatère direct
3. Montrer que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$
4. Vérifier que $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = -i\dfrac{(m-1)}{(m+i)}$
   en déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que $\Omega\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$, M, M_1, M_2 soient cocycliques (utiliser $\dfrac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} = i$)

Exercice 2 7ps

Partie I

soit $f$la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-e^{-x}}\right), x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ que peut on déduire ?
2. montrer que f est continue à droite de 0
3. soit $x > 0$ on pose pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$: $g(t) = e^{-\sqrt{t}} - 1 + \sqrt{t}$
   (a) en appliquant le théorème des accroissements finis à g sur $[0, x^2]$ montrer qu'il existe $c \in]0, x^2[$: $\frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-\sqrt{c}} - 1}{\sqrt{c}}$
   puis déduire qu'il existe $d \in]0, x[$: $\frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}e^{-d}$
   (b) montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. montrer que f est dérivable à droite de 0 et que $f'_d(0) = \frac{1}{2}$ on pourra utiliser la question 3)b
5. montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $\forall x > 0 : f'(x) = \frac{e^{-x}(e^x - 1 - x)}{x(1 - e^{-x})}$
6. montrer que $\forall x > 0 : e^x - 1 - x > 0$ et donner le tableau de variation de f
7. tracer (C_f)

Partie II

soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a_n}\right)$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n$
2. justifier que $\forall x > 0 : 0 < 1 - e^{-x} < x$ en déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. on pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(a_k)$
   (a) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f(x) \leq x$ et que $\forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
   (b) en déduire que la suite (S_n) est majorée
   (c) montrer que (S_n) est croissane en déduire qu'elle est convergente
   on note ℓ sa limite (on ne vous demande pas de calculer ℓ).
   (d) montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : \ln\left(2^k a_k\right) - \ln\left(2^{k+1} a_{k+1}\right) = f(a_k)$
   et déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n a_n = e^{-S_{n-1}}$
4. montrer que la suite $(2^n a_n)_{n\geq0}$ est convergente et donner en fonction de ℓ sa limite

Exercice 3 6pts

dans cet exercice la notation $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ représente le réel $e^{\frac{1}{x}}$

soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $H(x) = \int_x^{2x} e^{\frac{1}{t}} dt$

1. justifier l'existence de $H(x)$ pour chaque $x > 0$
2. montrer que pour chaque $x > 0$: $x\exp\left(\frac{1}{2x}\right) \leq H(x) \leq x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
3. Déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{x}$
4. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour chaque $x > 0$:$H'(x)$ a même signe que $2 - \exp\left(\frac{1}{2x}\right)$
5. on pose $\alpha = \frac{1}{2\ln 2}$
   (a) montrer que H est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et strictement déroissante sur $]0, \alpha]$
   (b) montrer $\frac{1}{\ln 2} < H(\alpha) < \frac{2}{\ln 2}$
6. soit $x > 0$
   (a) à l'aide d'une intégration par partie montrer que
   $$H(x) = 2x\exp\left(\frac{1}{2x}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right) dt$$
   (b) montrer que
   $$\exp\left(\frac{1}{2x}\right)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \leq \int_x^{2x}\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)dt \leq \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$$
   en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)dt = \ln 2$
7. montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\exp\left(\frac{1}{2x}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right) - x = 0$
8. déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) - x = \ln 2$ et intérpréter géométriquement le résultat

Exercice 4 CHOIX 1(structures algébriques) 3.5pts

on définit sur $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ par

$$\forall(a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4 : (a+ib)*(x+iy) = a\,x + i(b+y)$$

1. montrer que $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$

2. montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera
3. soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ montrer que $(a+ib)$ est symétrisable dans $(\mathbb{C},*)$ et son symétrique est $\frac{1}{a} + -bi$
4. soit $E = \{z \in C / \mathbf{Re}(z) > 0\}$
   montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif
5. soit $H = \{\ x + i.\ln(x) \ / x \in \mathbb{R}^{*+}\}$ montrer que $(H,*)$ est un sous groupe de $(E,*)$
6. on définit dans E la loi de composition interne $\top$ par
   pour chaque $(a,x) \in]0,+\infty[^2$ et pour chaque $(b,y) \in \mathbb{R}^2$: on pose

$$(a+ib) \top (x+iy) = x^b a^y + (by - \ln(a)\ln(x))\, i$$

   montrer que $\top$ est commutative et distributive par rapport à $*$ dans E
7. soit l'application $f \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & E \\ x+iy & \mapsto & e^y + i.x \end{array}$
   (a) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \top)$
   (b) montrer que $f(\mathbb{C}^*) = E - \{1\}$
8. Déduire que $(E,*,\top)$ est un corps commutatif

Exercice 5 CHOIX 2(arithmétiiques) 3.5pts

Partie I

soit p un nombre premier tel que $p > 3$ on suppose qu'il existe deux entiers a,b premiers entre eux tels que $p / a^2 + ab + b^2$

1. montrer que $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$
2. montrer $a^3 \equiv b^3 [p]$ et $a^{p-1} \equiv b^{p-1} [p]$
3. déduire que $p \equiv 1[3]$

partie II

on considère dans $\mathbb{N}^{*^2}$ l'équation : $(E) : x(2021 - x) = y(x+y)$
soit (x,y) une solution de (E) on pose $d = x \wedge y$ et $x = da$ et $y = db$

1. vérifier que $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \left(a^2 + ab + b^2\right) d = 2021a \end{cases}$
2. montrer que $\left(a^2 + ab + b^2\right) \wedge a = 1$ en déduire que $a^2 + ab + b^2 / 2021$
3. montrer en utilisant la partie I que $a^2 + ab + b^2 = 43$ (on rappel que $2021 = 43 \times 47$
4. déduire dans $\mathbb{N}^{*^2}$ les solutions de (E)